

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

**ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ**

**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ СТРОИТЕЛЬНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ
(МГСУ)**

Кафедра «Испытание сооружений»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

ПО КУРСУ «СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ»

Часть 1

**«ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК
ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЙ»**

для студентов факультета МиАС
(специальности 270101, 270113, 190205)

МОСКВА
2009

СОСТАВИТЕЛИ:

Проф., докт. тех. наук	А.В. Коргин
Проф., канд. тех. наук	Л.А. Бондарович
Доц., канд. тех. наук	Л.Х. Сафина

В подготовке принимал участие:

Ассистент	Ю.А. Воронцов
-----------	---------------

Научный редактор

Проф., канд. тех. наук, зав. каф.	Ю.С. Кунин
-----------------------------------	------------

Рецензент

Доцент, канд. техн. наук (Московская Государственная Академия Водного Транспорта)	А.С. Подгорный
---	----------------

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО КУРСУ «СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ» Часть 1

«ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЙ»

Для студентов факультета МиАС
(специальности 270101, 270113, 190205)

Редактор Н.И. Богдасарова
Технический редактор С.М. Сивоконева

Подписано в печать	Формат	Печать офсетная
И-15 Объём	Тираж	Заказ

Типография

III. Литература

1. Феодосьев, В. И. Сопротивление материалов [Текст] / В. И. Феодосьев. - Изд. 14-е, испр. - М. : МГТУ, 2007. - 591 с. : ил.
2. Александров, А. В. Сопротивление материалов [Текст] / А. В. Александров, В. Д. Потапов, Б. П. Державин ; ред. А. В. Александров. - 5-е изд., стер. - М.: Высш. шк., 2007. - 560 с. : ил.
3. Варданян, Г. С. Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности [Text] / Г. С. Варданян, Андреев В.И., Атаров Н.М., Горшков А.А. - М. : Изд-во АСВ, 1995. - 572 с. : ил.
4. Грес, П. В. Руководство к решению задач по сопротивлению материалов [Текст] : учеб.пособие для техн.вузов / П. В. Грес. - Изд. 2-е, стер. - М.: Высш. шк., 2007. - 135 с.: ил.
5. Писаренко, Г. С. Справочник по сопротивлению материалов [Текст] / Г. С. Писаренко, А. П. Яковлев, В. В. Матвеев. - 2-е изд., перераб. и доп. - Киев : Наук.думка, 1988. - 734 с. : ил.

I. Геометрические характеристики поперечного сечения (рис.1).

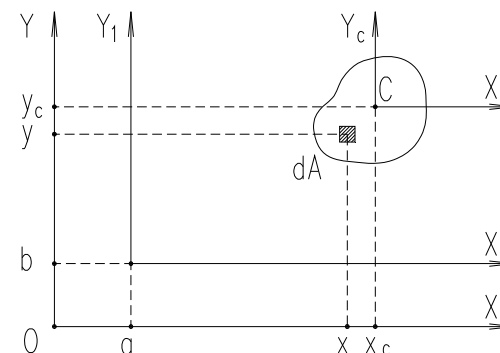


Рис. 1

Точка C – центр тяжести сечения.

1. Статические моменты сечения относительно прямоугольных осей:

$S_x = \int_A y \cdot dA$ - статический момент сечения относительно оси X;

$S_y = \int_A x \cdot dA$ - статический момент инерции относительно оси Y.

При переходе от системы координат XY к другой системе X_1Y_1 с параллельными осями:

$$x_1 = x - a; y_1 = y - b;$$

$$S_{x1} = \int_A (y - b) \cdot dA = S_x - b \cdot A$$

$$S_{y1} = \int_A (x - a) \cdot dA = S_y - a \cdot A$$

Для осей X_cY_c , проходящих через центр тяжести сечения (центральные оси),

$$S_{xc} = S_{yc} = 0.$$

Положение центра тяжести сечения в произвольной системе координат XY определяется из выражений

$$x_c = \frac{S_y}{A}; y_c = \frac{S_x}{A}.$$

Положение центра тяжести составного сечения в произвольной системе координат XY , у которого известны значения площадей и координаты центров тяжести отдельных составляющих сечения, определяется из выражений

$$x_c = \frac{\sum_i^n A_i \cdot x_{ci}}{\sum_i^n A_i}; y_c = \frac{\sum_i^n A_i \cdot y_{ci}}{\sum_i^n A_i},$$

где x_{ci} , y_{ci} – координаты центров тяжести составляющих сечения;

A_i – площадь отдельных составляющих сечения.

2. Моменты инерции сечения относительно прямоугольных осей:

$J_x = \int_A y^2 \cdot dA$ – момент инерции сечения относительно оси X ;

$J_y = \int_A x^2 \cdot dA$ – момент инерции сечения относительно оси Y ;

$J_{xy} = \int_A x \cdot y \cdot dA$ – центробежный момент инерции сечения.

Если одна из осей, X или Y , является осью симметрии сечения, то $J_{xy} = 0$.

При переходе от системы координат XY к другой системе $X_I Y_I$

$$J_{x_I} = \int_A (y - b)^2 \cdot dA = \int_A (y^2 - 2 \cdot b \cdot y + b^2) \cdot dA = J_x -$$

$$- 2 \cdot b \cdot S_x + b^2 \cdot A.$$

Если исходная система координат XY – центральная ($X_c Y_c$), то $S_{x_c} = 0$. Следовательно:

$$J_x = J_{x_c} + b^2 \cdot A;$$

$$J_y = J_{y_c} + a^2 \cdot A;$$

$$J_{y_c} = i_{y_c}^2 \cdot A = 10,2^2 \cdot 149,2 = 15523 \text{ см}^4$$

$$J_{x_c y_c} = i_{y_c} \cdot b \cdot A = 10,2 \cdot 6,6 \cdot 149,2 = 10011 \text{ см}^4$$

$$J_{x_c y_c} = i_{x_c} \cdot a \cdot A = 12,2 \cdot 5,5 \cdot 149,2 = 10044 \text{ см}^4$$

Аналитические значения радиусов инерции i_{xc} и i_{yc} :

$$i_{x_c} = \sqrt{\frac{J_x}{A}} = \sqrt{\frac{22055}{142,9}} = 12,16 \text{ см},$$

$$i_{y_c} = \sqrt{\frac{J_y}{A}} = \sqrt{\frac{8283}{142,9}} = 10,22 \text{ см}$$

7. Сопоставление данных, полученных аналитически и графически (табл. 4).

Таблица 4.

Способы получения данных	J_{x0} см ⁴	J_{y0} см ⁴	$J_{x_{с0}y_{с0}}$ см ⁴	J_{max} см ⁴	J_{min} см ⁴	α_0 , град.	i_{xc} см	i_{yc} см
Аналитический	22055	15600	10038	29371	8283	-36°05'	12,16	10,22
Графический	22207	15523	10044	29250	8250	-35°10'	12,22	10,2

6. Графическое определение моментов инерции с помощью эллипса инерции (рис.11).

Радиусы инерции относительно главных осей:

$$i_{max} = \sqrt{\frac{J_{max}}{A}} = \sqrt{\frac{29371}{142,9}} = 14,33 \text{ см};$$

$$i_{min} = \sqrt{\frac{J_{min}}{A}} = \sqrt{\frac{8283}{142,9}} = 7,61 \text{ см}$$

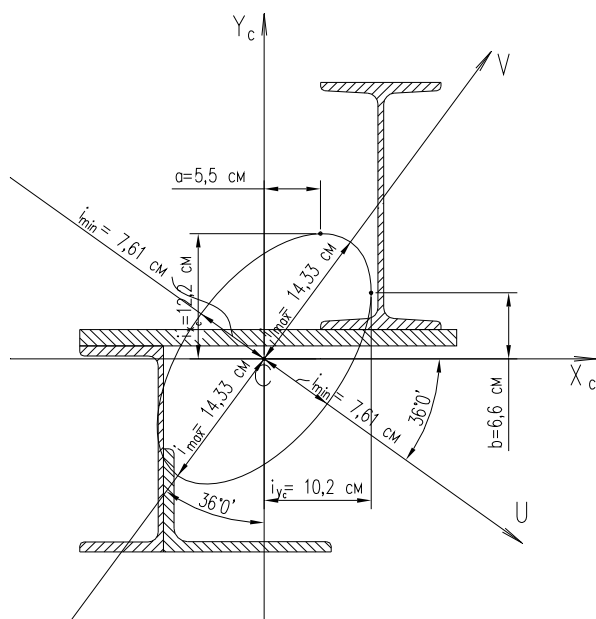


Рис.11

Значения моментов инерции J_{xc} , J_{yc} , J_{xcyc} , вычисление с помощью эллипса инерции:

$$J_{xc} = i_{xc}^2 \cdot A = 12,2^2 \cdot 149,2 = 22207 \text{ см}^4$$

$$J_{xy} = J_{xcyc} + a \cdot b \cdot A.$$

Моменты инерции составного сечения, у которого известно положение центров тяжести отдельных составляющих, а также даны или могут быть просто вычислены собственные моменты инерции (относительно осей с началом координат в центре тяжести каждой составляющей), определяется из выражений:

$$J_x = \sum_i^n (J_{x_o} + y_{ci}^2 \cdot A_i);$$

$$J_y = \sum_i^n (J_{y_o} + x_{ci}^2 \cdot A_i);$$

$$J_{xy} = \sum_i^n (J_{x_o y_o} + x_{ci} y_{ci} \cdot A_i),$$

где J_{x_o} , J_{y_o} , $J_{x_o y_o}$ - моменты инерции составляющих сечения относительно осей, проходящих через собственные центры тяжести;

x_{ci} , y_{ci} - координаты центров тяжести составляющих сечения в системе координат XY .

3. Главные моменты инерции. Положение главных центральных осей (рис.2).

При повороте центральных осей вокруг центра тяжести на некоторый угол α моменты инерции сечения относительно нового положения осей U и V меняются следующим образом:

$$J_{x_l} = \frac{J_x + J_y}{2} + \frac{J_x - J_y}{2} \cdot \cos 2\alpha - J_{xy} \cdot \sin 2\alpha;$$

$$J_{y_l} = \frac{J_x + J_y}{2} - \frac{J_x - J_y}{2} \cdot \cos 2\alpha + J_{xy} \cdot \sin 2\alpha;$$

$$J_{x_l y_l} = \frac{J_x - J_y}{2} \cdot \sin 2\alpha + J_{xy} \cdot \cos 2\alpha.$$

Сумма осевых моментов инерции при повороте осей не меняется:

$$J_{x_l} + J_{y_l} = J_x + J_y.$$

Оси U, V для которых значение центробежного момента инерции $J_{uv} = 0$, называются главными центральными осями. Положение главных центральных осей определяется из выражения

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2 \cdot J_{xy}}{J_x - J_y},$$

где α_0 – угол между осями X и U .

Для главных центральных осей осевые моменты инерции принимают главные (экстремальные) значения и вычисляются из выражения

$$J_{\frac{max}{min}} = \frac{J_x + J_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_x - J_y}{2}\right)^2 + J_{xy}^2}.$$

Угол $\alpha_0 > 0$, если откладывается от оси X против часовой стрелки.

4. Графическое определение положения главных центральных осей и главных моментов инерции с помощью круга Мора (рис.3).

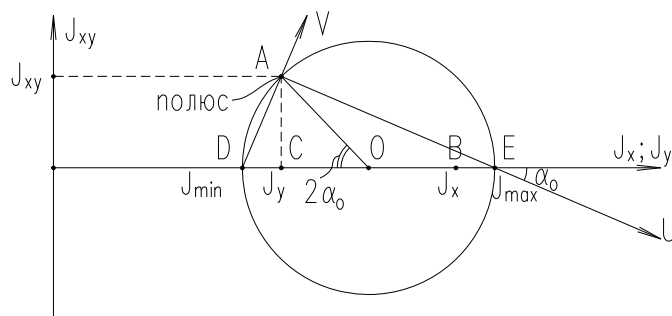


Рис. 3

Правила построения круга Мора для моментов инерции

а) на горизонтальной оси откладываются значения осевых моментов инерции J_x и J_y (точки B и C) и значение их полусуммы (точка O);

б) из точки C , соответствующей значению момента инерции J_y , по вертикали откладывается значение центробежного момента инерции J_{xy} (положительное значение - вверх);

$$\pm \sqrt{\left(\frac{22055 - 15600}{2}\right)^2 + 10038^2} = 18827 \pm 10544 \text{ см}^4$$

$$J_{max} = 29371 \text{ см}^4; J_{min} = 8283 \text{ см}^4$$

Тангенс угла наклона главной оси U :

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2 \cdot J_{x_c y_c}}{J_{y_c} - J_{x_c}} = \frac{2 \cdot 10038}{15600 - 22055} = -3,11;$$

$$2\alpha_0 = -72^\circ 10'; \alpha = -36^\circ 05'.$$

5. Графическое определение главных моментов инерции и положения главных осей с помощью круга инерции (рис. 10).

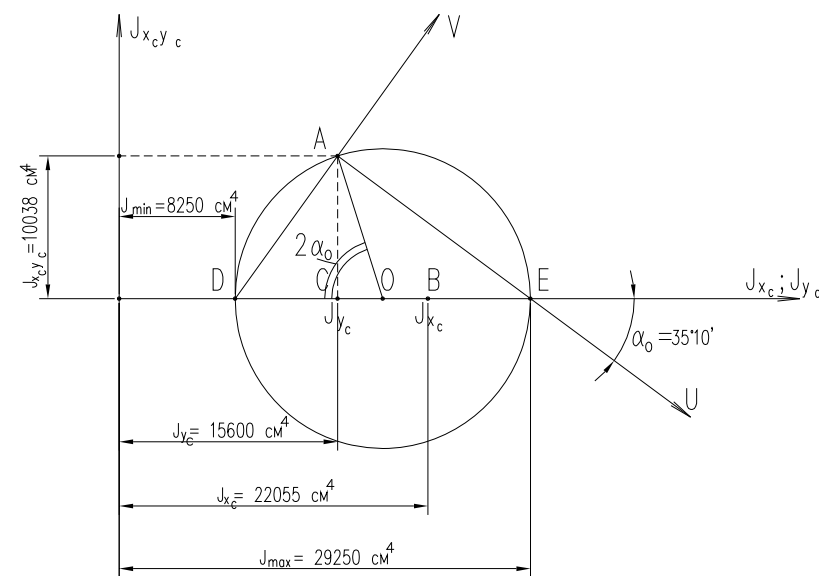


Рис. 10

Погрешность вычислений не должна превышать 1% максимальной доли статического момента одного знака:

$$\Delta S_x \% = \frac{0,5 \cdot 100}{636,7} = 0,078\% < 1\%;$$

$$\Delta S_y \% = \frac{0,2 \cdot 100}{410,7} = 0,047\% < 1\%;$$

3. Определение моментов инерции J_{xc} , J_{yc} , J_{xcyc}

Моменты инерции составного сечения относительно центральных осей определяются по формулам:

$$J_x = \sum_l J_{xci} = \sum_l (J_{xi} + b_i^2 \cdot A_i);$$

$$J_y = \sum_l J_{ycl} = \sum_l (J_{yi} + a_i^2 \cdot A_i);$$

$$J_{xcyc} = \sum_l J_{xyci} = \sum_l (J_{xyi} + a_i \cdot b_i \cdot A_i).$$

Вычисление моментов инерции также целесообразно проводить в табличной форме (табл. 3).

Таблица 3.

№ эл-та	Пло- щадь сечения, $см^2$	Расстояние переноса осей, $см$		Моменты инерции сечения ($см^4$) относительно центральных осей					
		a_i	b_i	собственных			общих		
				J_{xi}	J_{yi}	J_{xyi}	J_{xci}	J_{ycl}	J_{xyci}
1	25,3	-4,38	-16,45	204	667	-212	7050,3	1152,4	1610,9
2	57,6	0,39	2,07	12,29	6220,8	0	259,1	6229,4	46,5
3	34,8	11,14	14,87	3460	198	0	11155,0	4516,6	5764,8
4	25,2	-11,89	-8,73	1670	139	0	3590,6	3701,6	2615,8
Σ	142,9						22055,0	15600,0	10038,0

$$J_{xc} = 22055 \text{ см}^4; J_{yc} = 15600 \text{ см}^4; J_{xcyc} = 10038 \text{ см}^4.$$

4. Определение главных моментов инерции и положение главных осей

Максимальный и минимальный моменты инерции:

$$J_{\frac{max}{min}} = \frac{J_{xc} + J_{yc}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_{xc} - J_{yc}}{2}\right)^2 + J_{xcyc}^2} = \frac{22055 + 15600}{2} \pm$$

в) из точки O радиусом OA проводится окружность, отсекающая на горизонтальной оси значения главных моментов инерции J_{max} и J_{min} ;

г) ось U , соответствующая максимальному значению главного момента инерции J_{max} , пройдет через точки A и E (J_{max}), ось V , соответствующая минимальному значению J_{min} – через точки A и D (J_{min});

д) точность определения J_{max} , J_{min} и угла α_0 зависит от масштаба построения круга Мора.

5. Радиусы инерции. Эллипс инерции (рис.4).

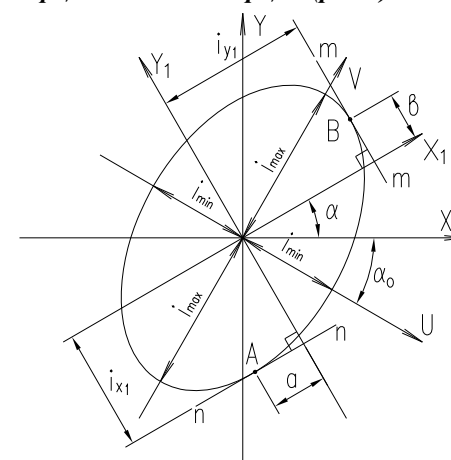


Рис.4

$$i_{x1} = \sqrt{\frac{J_{x1}}{A}} - \text{радиус инерции относительно оси } X_1;$$

$$i_{y1} = \sqrt{\frac{J_{y1}}{A}} - \text{радиус инерции относительно оси } Y_1;$$

$$i_{max} = \sqrt{\frac{J_{max}}{A}} - \text{максимальный радиус инерции относительно оси } U;$$

$i_{min} = \sqrt{\frac{J_{min}}{A}}$ - минимальный радиус инерции относительно оси V .

Правила построения эллипса инерции и графического определения осевых и центробежного моментов инерции для произвольного положения центральных осей

а) вычисляются значение угла наклона α_0 главных центральных осей U и V и значения главных радиусов инерции i_{max} и i_{min} ;

б) на чертеже строится положение главных центральных осей U и V и в масштабе по осям откладываются значения i_{max} (на оси V) и i_{min} (на оси U);

в) соблюдая правила машиностроительного черчения, через точки, отсекаемые на осях U и V значениями i_{max} и i_{min} , проводится эллипс;

г) параллельно заданной системе координат $X_I Y_I$ к контуру эллипса проводятся касательные $n-n$ и $m-m$ во взаимно перпендикулярных направлениях и фиксируются точки касания A и B ;

д) касательные отсекают на осях $X_I Y_I$ значения радиусов инерции i_{yI} и i_{xI} ;

е) значения осевых и центробежного моментов инерции J_{x_I} ; J_{y_I} ; $J_{x_I y_I}$; вычисляются из выражений:

$$J_{x_I} = i_{x_I}^2 \cdot A;$$

$$J_{y_I} = i_{y_I}^2 \cdot A;$$

$$J_{x_I y_I} = i_{x_I}^2 \cdot a \cdot A = i_{y_I}^2 \cdot b \cdot A,$$

где a , b – расстояния от точек касания A и B до осей $X_I Y_I$.

Для правильного определения знака центробежного момента инерции $J_{x_I y_I}$ необходимо значение радиусов инерции i_{x_I} и i_{y_I} , а также расстояния a и b от точек касания брать со своими знаками в системе координат $X_I Y_I$.

Положение центра тяжести составного сечения:

$$x_c = \frac{\sum_i^n S_{yi}}{\sum_i^n A_i} = \frac{2516,1}{142,9} = 17,61 \text{ см};$$

$$y_c = \frac{\sum_i^n S_{xi}}{\sum_i^n A_i} = \frac{2677,1}{142,9} = 18,73 \text{ см}$$

Проверка положения центра тяжести: статические моменты составного сечения относительно центральных осей $X_c Y_c$ должны быть равны 0. Предварительно необходимо вычислить положение центра тяжести каждого элемента в системе центральных осей (табл. 2):

$$a_i = x_{ci} - x_c;$$

$$a_1 = 13,23 - 17,61 = -4,38 \text{ см};$$

$$a_2 = 18,00 - 17,61 = 0,39 \text{ см};$$

$$a_3 = 28,75 - 17,61 = 11,14 \text{ см};$$

$$a_4 = 5,72 - 17,61 = -11,89 \text{ см};$$

$$b_i = y_{ci} - y_c;$$

$$b_1 = 2,28 - 18,73 = -16,45 \text{ см};$$

$$b_2 = 20,8 - 18,73 = 2,07 \text{ см};$$

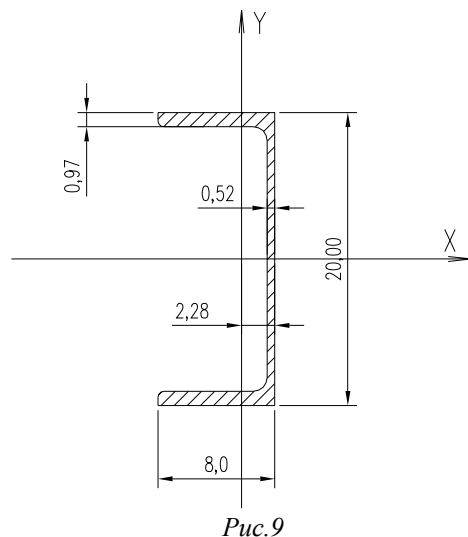
$$b_3 = 33,6 - 18,73 = 14,87 \text{ см};$$

$$b_4 = 10,0 - 18,73 = -8,73 \text{ см}.$$

Таблица 2.

№ элемента	Площадь сечения, см ²	Координаты центра тяжести элемента в системе $X_o Y_o$, см		Статические моменты, см ³	
		a_i	b_i	$S_{xci} = b_i \cdot A_i$	$S_{y ci} = a_i \cdot A_i$
1	25,3	-4,38	-16,45	-416,2	-110,8
2	57,6	0,39	2,07	119,2	22,5
3	34,8	11,14	14,87	517,5	387,7
4	25,2	-11,89	-8,73	-220,0	-299,6
Σ	142,9			636,7-636,2 = 0,5	410,4-410,2 = 0,2

№4. Швеллер № 20а (рис. 9)



$$\begin{aligned} A &= 25,2 \text{ см}^2; \\ J_x &= 1670 \text{ см}^4; \\ J_y &= 139 \text{ см}^4; \\ h &= 20,0 \text{ см}; \\ b &= 8,0 \text{ см}; \\ t &= 0,97 \text{ см}; \\ d &= 0,52 \text{ см}; \\ x_o &= 2,28 \text{ см}. \end{aligned}$$

Рис. 9

2. Определение положения центра тяжести сечения

Предварительно необходимо задаться произвольным положением осей X и Y , которые целесообразно проводить так, чтобы все сечение оставалось в 1-м квадранте системы координат.

Определение положения центра тяжести составного сечения и проверку вычислений удобно проводить в табличной форме (табл. 1).

Таблица 1.

№ элемента	Площадь сечения, см^2	Координаты центра тяжести элемента в системе XY , см		Статические моменты, см^3	
		x_{ci}	y_{ci}	$S_{xi} = y_{ci} \cdot A_i$	$S_{yi} = x_{ci} \cdot A_i$
1	25,3	13,23	2,28	57,7	334,7
2	57,6	18,0	20,8	1198,1	1036,8
3	34,8	28,75	33,6	1169,3	1000,5
4	25,2	5,72	10,0	252,0	144,1
Σ	142,9			$S_x = 2677,1$	$S_y = 2516,1$

II. Пример выполнения задания

Исходные данные: сечение состоит из горизонтального листа 360×16 мм, швеллера № 20а, двутавра № 24, неравнобокого уголка $160 \times 100 \times 10$ (рис. 5).

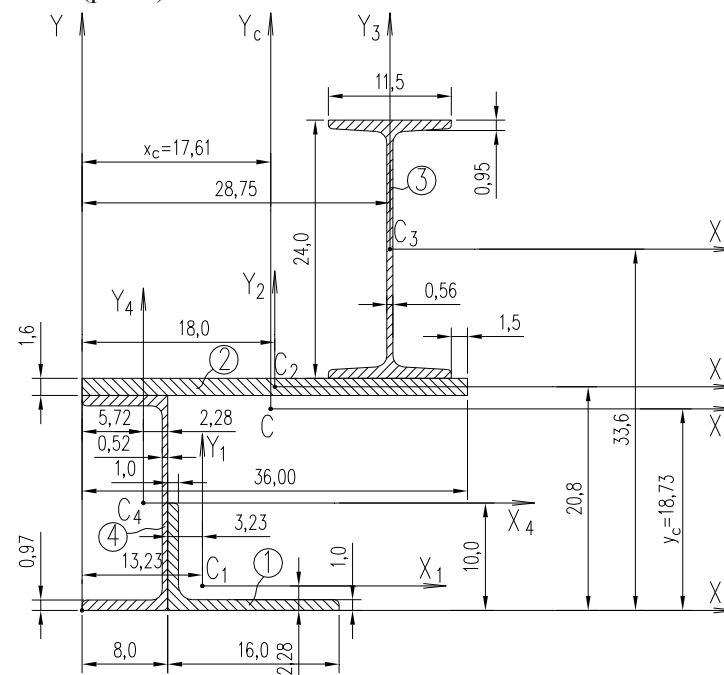


Рис. 5

Необходимо:

1. Определить исходные геометрические характеристики поперечного сечения элементов.
2. Определить положение центра тяжести сечения.
3. Определить моменты инерции относительно центральных осей.
4. Определить главные моменты инерции и положение главных осей.
5. Определить главные моменты инерции и положение главных осей с помощью круга инерции.
6. Определить моменты инерции с помощью эллипса инерции.
7. Сопоставить данные, полученные аналитически и графически.

1. Определение исходных геометрических характеристик элементов

При определении геометрических характеристик элементов по сортаменту необходимо учитывать положение элемента в пространстве и, если оно отличается от принятого в сортаменте, то индекс “X” должен быть заменен на индекс “Y”, и наоборот.

№1. Неравнобокий уголок $160 \times 100 \times 10$ (рис. 6)

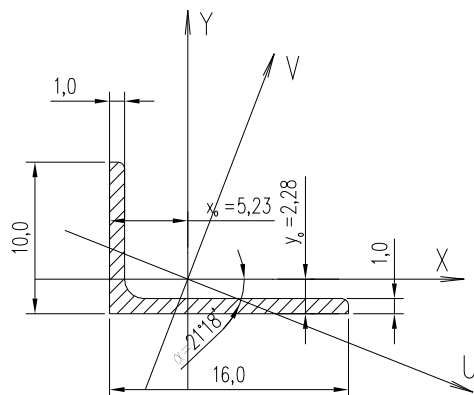


Рис.6

$$\begin{aligned} A &= 25,3 \text{ см}^2; \\ J_x &= 204 \text{ см}^4; \\ J_y &= 667 \text{ см}^4; \\ \text{tg } \alpha &= 0,390; \\ x_0 &= 5,23 \text{ см}; \\ y_0 &= 2,28 \text{ см}; \end{aligned}$$

Для определения центробежного момента инерции уголка J_{xy} необходимо установить знак угла α наклона оси U , руководствуясь следующим правилом: если для совмещения исходной оси U с осью X по кратчайшему расстоянию необходимо повернуть ось U против часовой стрелки, то угол α будет положительным, если по часовой стрелке – отрицательным. При данном положении уголка угол α – положительный.

$$\text{tg } \alpha = 0,390; \alpha = 21^\circ 18'; 2\alpha = 42^\circ 36'; \text{tg } 2\alpha = 0,918.$$

Центробежный момент вычисляется по формуле

$$J_{xy} = \frac{J_x - J_y}{2} \cdot \text{tg } 2\alpha = \frac{204 - 667}{2} \cdot 0,918 = -212 \text{ см}^4$$

№2. Горизонтальный лист 360×16 мм (рис. 7)

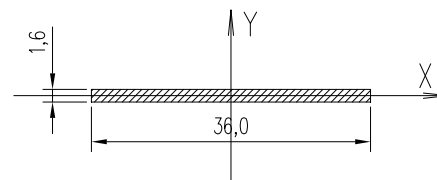


Рис.7

$$\begin{aligned} A &= 36 \cdot 1,6 = 57,6 \text{ см}^2; \\ J_x &= \frac{36 \cdot (1,6)^3}{12} = 12,29 \text{ см}^4; \\ J_y &= \frac{1,6 \cdot (36)^3}{12} = 6220,8 \text{ см}^4 \end{aligned}$$

№3. Двутавр № 24 (рис. 8)

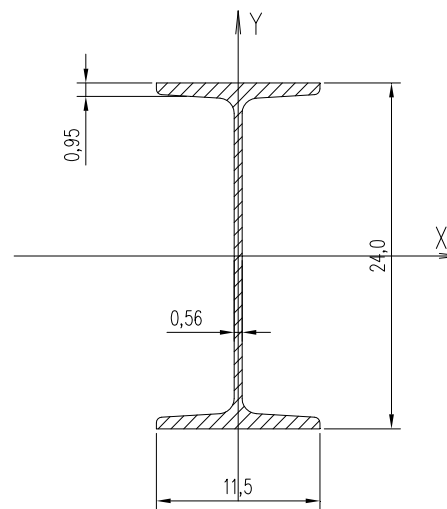


Рис.8

$$\begin{aligned} A &= 34,8 \text{ см}^2; \\ J_x &= 3460 \text{ см}^4; \\ J_y &= 198 \text{ см}^4; \\ h &= 24,0 \text{ см}; \\ b &= 11,5 \text{ см}; \\ t &= 0,95 \text{ см}; \\ d &= 0,56 \text{ см}. \end{aligned}$$